

The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Romain Boulet

Institut de Mathématiques de Toulouse
Université de Toulouse et CNRS (UMR 5219)
boulet@univ-tlse2.fr

This paper was submitted on February 22nd, 2008 in *Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences de Paris*, accepted after revision on May 24th, 2008, available online on June 20th, 2008.

Abstract

A centipede is a graph obtained by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path. In this paper we prove that the centipede is determined by its Laplacian spectrum. *To cite this article: R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

Résumé

Le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien.

Un mille-pattes est un graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne. Dans cet article nous montrons qu'un mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien. *Pour citer cet article : R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

Version française abrégée

Le Laplacien L d'un graphe est la matrice $L = D - A$ où D est la matrice diagonale des degrés et A est la matrice d'adjacence du graphe. Le spectre du Laplacien donne des informations sur la structure du graphe, comme la connexité (voir [2, 4] pour plus de détails), ces informations sont souvent insuffisantes pour reconstruire le graphe à partir du spectre et la question « Quels graphes sont déterminés par leur spectre ? » [2] demeure un problème difficile. En particulier il est connu [5] que presque aucun arbre n'est déterminé par le spectre du Laplacien et seules quelques familles d'arbres déterminés par leur spectre ont jusqu'alors été découvertes (citons par exemple [6] et [7]).

On appelle mille-pattes le graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne (voir figure 1). Nous montrons dans cet article que le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien, enrichissant ainsi les familles connues d'arbres déterminés par le spectre du Laplacien.

On note P_k la chaîne à k sommets et T le triangle. Deux graphes sont dits A -cospectraux (resp. L -cospectraux) s'ils ont même spectre pour la matrice d'adjacence (resp. le Laplacien). Les valeurs propres de la matrice d'adjacence d'un graphe G d'ordre n sont notées $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ et celles du Laplacien $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G)$. Le graphe représentatif des arêtes $\mathcal{L}(G)$ de G a pour sommets les arêtes de G et deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans G possèdent un sommet commun.

Les résultats suivants sont connus et permettent d'obtenir des informations sur la structure du graphe à partir du spectre du Laplacien :

Théorème 1. [4] Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $d(v)$ le degré d'un sommet v . Alors :

$$\max\{d(v), v \in V(G)\} < \mu_1(G) \leq \max\{d(u) + d(v), uv \in E(G)\}$$

Théorème 2. [2] Le nombre de sommets, d'arêtes, de composantes connexes et d'arbres couvrants d'un graphe peuvent être déduits du spectre de son Laplacien.

Théorème 3. [3, 4] Soit G un arbre à n sommets, alors $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Le spectre de la matrice d'adjacence donne également des informations sur la structure du graphe ; il est en particulier connu que $\sum_i \lambda_i^k$ est égal au nombre de marches fermées de longueur k dans G .

Soit M un graphe, une marche fermée couvrante de longueur k sur M est une marche fermée de longueur k sur M parcourant toutes les arêtes de M au moins une fois. On note $w_k(M)$ le nombre de marches fermées couvrantes de longueur k sur M et on définit l'ensemble $\mathcal{M}_k = \{M, w_k(M) > 0\}$. Le nombre sous graphes (non nécessairement induits) de G isomorphes à M est noté $|M(G)|$.

Ainsi le nombre de marches fermées de longueur k de G est :

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M) |M(G)|$$

Une première étape dans la démonstration consiste à étudier l'ensemble \mathcal{T} des graphes définis ainsi : G est le graphe T ou G est obtenu en identifiant un sommet de degré 2 de $H \in \mathcal{T}$ et un sommet de T .

Le sous-ensemble \mathcal{T}_n de \mathcal{T} constitué des graphes de \mathcal{T} avec exactement n triangles est en bijection avec l'ensemble \mathcal{A}_n des arbres à n sommets de degré maximal inférieur ou égal à 3. Cette bijection est l'application $K : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ qui à un graphe G associe son graphe des cliques $K(G)$. Les sommets de $K(G)$ sont les sous-graphes complets maximaux de G et deux sommets de $K(G)$ sont adjacents si et seulement si l'intersection des sous graphes complets maximaux correspondants dans G est non vide.

Nous montrons ensuite qu'aucun graphe de \mathcal{T} ne peut être A -cospectral avec $K^{-1}(P_k)$. Pour cela nous dénombrons le nombre de marches fermées de longueur 7 pour $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ et nous obtenons

$$\sum_i \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

où t est le nombre de sommets de $K(G)$ et t_3 le nombre de sommets de degré 3 de $K(G)$. Il reste à remarquer que $K^{-1}(P_k)$ minimise cette quantité car $K(K^{-1}(P_k)) = P_k$ ne possède aucun sommet de degré 3.

La deuxième étape de la démonstration est de déterminer la distribution des degrés d'un graphe G L -cospectral avec un mille-pattes, on note n_i le nombre de sommets de G de degré i . Le théorème 1 implique que le degré maximal de G est inférieur ou égal à 5. Puis le théorème 2 et la proposition 1

Proposition 1. *i) Soit G un graphe, la somme des carrés des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.
ii) Soit G un graphe dont on connaît le nombre de triangles, alors la somme des cubes des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.*

nous permettent d'obtenir le système suivant que l'on résoud.

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26 \end{cases}$$

On obtient alors que G est un arbre d'ordre n avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3. Il en découle que $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$. Or, comme G est L -cospectral avec un mille-pattes, le théorème 3 implique que $\mathcal{L}(G)$ est A -cospectral avec $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ et donc $\mathcal{L}(G)$ est isomorphe à $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ (première étape de la démonstration). On conclut en remarquant qu'un arbre avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3 dont le graphe des lignes est isomorphe à $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ est nécessairement un mille-pattes.

1 Introduction

The Laplacian of a graph is the matrix $L = D - A$ where A is the adjacency matrix and D is the diagonal matrix of degrees. Some structural properties of the graph such as connectivity can be determined from the Laplacian spectrum (see [2, 4] for more details). However the Laplacian spectrum does generally not determine the graph and the question "Which graphs are determined by their spectrum?" [2] remains a difficult problem. Moreover it is known [5] that almost no trees are determined by their Laplacian spectrum and the few trees proved to be determined by their Laplacian spectrum (see for instance [6] or [7]) may be viewed in this sense as exceptionnal graphs.

A centipede is a tree constructed by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path (see figure 1 for an example). We show in this article that a centipede is determined by its Laplacian spectrum, thus enlarging the known families of trees determined by their Laplacian spectrum.

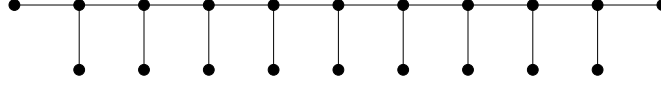


Figure 1: A centipede

To fix notations, the path with k vertices is denoted by P_k and the triangle by T . Two graphs are A -cospectral (resp. L -cospectral) if they have the same adjacency (resp. Laplacian) spectrum. For a graph G of order n , the eigenvalues of the adjacency matrix are denoted by $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ and the eigenvalues of the Laplacian by $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G)$ (when no confusion is possible we may omit to precise the graph).

We denote by $\text{Sp}(G)$ the spectrum of the adjacency matrix of G . The line graph $\mathcal{L}(G)$ of a graph G has the edges of G as its vertices and two vertices of $\mathcal{L}(G)$ are adjacent if and only if the corresponding edges in G have a common vertex. For a vertex v of a graph, $N(v)$ denotes the set of vertices adjacent to v and $d(v) = |N(v)|$ the degree of v .

Here are some known results about the Laplacian spectrum.

Theorem 1. [4] *Let $G = (V, E)$ be a graph where V (resp. E) is the set of vertices (resp. edges). Then:*

$$\max\{d(v), v \in V\} < \mu_1(G) \leq \max\{d(u) + d(v), uv \in E\}$$

Theorem 2. [2] *For the Laplacian matrix, the following can be deduced from the spectrum:*

- *The number of vertices.*
- *The number of edges.*
- *The number of connected components.*
- *The number of spanning trees.*

Theorem 3. [3, 4] *Let G be a tree with n vertices, then $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ for $1 \leq i \leq n - 1$.*

The spectrum of the adjacency matrix also gives some informations about structural properties of the graph, for instance it is a classical result that the number of closed walks of length $k \geq 2$ is $\sum_i \lambda_i^k$.

We describe here a method to count the number of closed walks of given length in a graph.

Let M be a graph, a k -covering closed walk in M is a closed walk of length k in M running through *all* the edges at least once. Let G be a graph, $M(G)$ denotes

the set of all distinct subgraphs (not necessarily induced) of G isomorphic to M and $|M(G)|$ is the number of elements of $M(G)$. The number of k -covering closed walks in M is denoted by $w_k(M)$ and we define the set $\mathcal{M}_k = \{M, w_k(M) > 0\}$. As a consequence, the number of closed walks of length k in G is:

$$\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^k = \sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M) |M(G)| \quad (1)$$

2 Preliminaries: definition and spectral properties of a set \mathcal{T} of graphs

Let \mathcal{T} be the set of graphs G defined as follow: G is the triangle T or G is formed by identifying a vertex of degree 2 of a graph $H \in \mathcal{T}$ and a vertex of the graph T .

The clique graph of G , denoted by $K(G)$, is the graph whose vertex set is the set of maximal complete subgraphs of G and two vertices of $K(G)$ are adjacent if and only if the corresponding complete subgraphs in G share at least one vertex. The set of graphs in \mathcal{T} with n triangles is denoted by \mathcal{T}_n .

Let \mathcal{A}_n be the set of trees on n vertices with maximal degree lower than or equal to 3. The following proposition is straightforward:

Proposition 1. *The application $K : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ is one-to-one.*

Equation (1) enables us to compute the number of closed walks of length 7 of a graph $G \in \mathcal{T}$:

Lemma 1. *We have for $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$:*

$$\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

where t is the number of vertices of $K(G)$ (ie the number of triangles in G) and t_3 is the number of vertices of degree 3 in $K(G)$.

PROOF : We use the relation

$$\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M) |M(G)|.$$

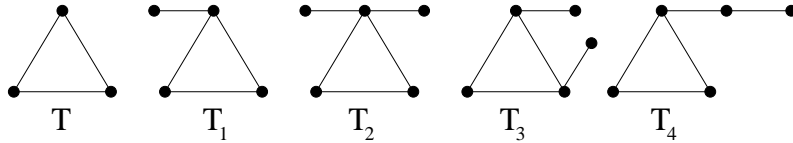


Figure 2: subgraphs of $G \in \mathcal{T}$ belonging to \mathcal{M}_7

As an odd closed walk necessarily runs through an odd cycle, it is clear that $M \in \mathcal{M}_7$ contains one and only one triangle. Only the graphs $T, T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{M}_7$ depicted in figure 2 can arise as subgraphs of $G \in \mathcal{T}$.

Let t be the number of vertices of $K(G)$ and $t_i, 1 \leq i \leq 3$, be the number of vertices of $K(G)$ of degree i . Since $K(G) \in \mathcal{A}_t$, we have $t_1 + t_2 + t_3 = t$ and $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 2t - 2$ (the sum of the degrees is twice the number of edges) showing $t_1 = t_3 + 2$ and $t_2 = t - 2 - 2t_3$.

For a triangle T of G (denoted by $T \subset G$), let $N(T)$ be the set of triangles of G sharing one vertex with T and $d(T) = |N(T)|$. Note that $d(T)$ is the degree of the vertex in $K(G)$ corresponding to $T \subset G$. We have:

- $|T(G)| = t$.
- $|T_1(G)| = 2 \sum_{T \subset G} d(T) = 2 \sum_{v \in V(K(G))} d(v) = 2(2t - 2)$
- $|T_2(G)| = \sum_{T \subset G} d(T) = \sum_{v \in V(K(G))} d(v) = 2t - 2$
- $|T_3(G)| = 4t_2 + 12t_3 = 4(t - 2) + 4t_3$
- $|T_4(G)| = 4(2t - 3 + t_3)$, indeed let e and e' be the two bridges of T_4 such that e shares a vertex with the triangle of T_4 . Let T be a triangle of G , then the number of T_4 such that e and e' belongs to T is $2d(T)$. The number of T_4 such that e belongs to T and e' does not is 4 if $d(T) = 2$ or 12 if $d(T) = 3$. This implies $|T_4(G)| = (2t_1 + 4t_2 + 6t_3) + (4t_2 + 12t_3)$, that is, $|T_4(G)| = 4(2t - 3 + t_3)$.

Let A, A_i denote the adjacency matrices of T, T_i . The resolution of the equations $\text{tr}(A^7) = w_7(T)$, $\text{tr}(A_1^7) = w_7(T) + w_7(T_1)$, $\text{tr}(A_2^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_2)$, $\text{tr}(A_3^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_3)$, and $\text{tr}(A_4^7) = w_7(T) + w_7(T_1) + w_7(T_4)$ yields $w_7(T) = 126$, $w_7(T_1) = 84$, $w_7(T_2) = 28$, $w_7(T_3) = 14$ and $w_7(T_4) = 14$.

This implies $\sum_i \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M) |M(G)| = 686t - 672 + 112t_3$.

□

Theorem 4. *The A -spectrum characterises $K^{-1}(P_k)$ in \mathcal{T} .*

PROOF : If $G \in \mathcal{T}$ is A -cospectral with $K^{-1}(P_k)$ then G and $K^{-1}(P_k)$ have the same number of vertices and triangles. If G and $K^{-1}(P_k)$ are not isomorphic then $K(G)$ possesses a vertex of degree 3 (so G is not isomorphic to T) and the previous lemma implies $\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(K^{-1}(P_k))} \lambda_i^7 < \sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^7$. This contradicts A -cospectrality of G with $K^{-1}(P_k)$.

□

3 The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Proposition 2. *i) The sum of squares of the degrees of a graph G can be deduced from its Laplacian spectrum.*

ii) The sum of cubes of the degrees of a graph G can be deduced from its Laplacian spectrum and from the number of triangles contained in G .

PROOF : i) We have $tr(L^2) = tr(D^2) - 2tr(AD) + tr(A^2)$, but $tr(AD) = 0$, $tr(A^2) = 2m$ where m is the number of edges and $tr(D^2)$ is the sum of squares of degrees of G .

ii) We have $tr(L^3) = tr(D^3) - tr(A^3) + 3tr(A^2D)$. But $tr(A^3)$ is six times the number of triangles of G , $tr(A^2D)$ is the sum of squares of degrees of G and $tr(D^3)$ is the sum of cubes of G .

□

Proposition 3. *If G is a graph on n vertices L -cospectral with a centipede, then G is a tree having $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1.*

PROOF : Theorem 1 implies that the maximal degree of G is at most 5. For $i = 1, \dots, 5$, let n_i be the number of vertices of degree i of G . The Laplacian spectrum of G determines the number of vertices, the number of edges, the sum of squares of the degrees and the sum of cubes of the degrees, that is:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26 \end{cases}$$

This system implies $n_2 = n_4 = -4n_5 = 2(n + 2 - 2n_1)$ showing $n_2 = n_4 = n_5 = 0$, $n_3 = \frac{n-2}{2}$, $n_2 = 0$ and $n_1 = \frac{n+2}{2}$.

□

Proposition 4. *Let G be a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1, if $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_k)$ then G is a centipede.*

PROOF : If G is not a centipede then it contains the subgraph H depicted in figure 3. This implies that $\mathcal{L}(G)$ is not isomorphic to $K^{-1}(P_k)$.

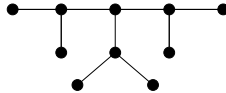


Figure 3: Subgraph of a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1 and different from a centipede

□

Theorem 5. *The centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

PROOF : Let G be a graph with n vertices L -cospectral with the centipede on n vertices. According to proposition 3, G is a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1. As G is L -cospectral with a centipede, theorem 3 implies that $\mathcal{L}(G)$ is A -cospectral with the line graph of the centipede, that is, $\mathcal{L}(G)$ is A -cospectral with $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$. Moreover $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$, so $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$ (theorem 4) and G is a centipede by proposition 4.

□

Since the Laplacian eigenvalues of a graph gives the Laplacian eigenvalues of its complement [4], we have the following corollary:

Corollary 1. *The complement of a centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

Remark 1. Non-uniqueness in \mathcal{T}_n of graphs maximising t_3 prevents unfortunately the adaptation of our proof to graphs in \mathcal{T}_n with t_3 maximal.

Acknowledgements

The author would like to thank the referee for his attentive reading and his relevant remarks.

References

- [1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press (1974).
- [2] E.R. van Dam, W.H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum?, Linear Algebra and its Applications 373 (2003) 241-272.
- [3] M. Doob, Eigenvalues of graphs, in: L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), Topics in Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press (2004) 30-55.
- [4] B. Mohar, The Laplacian Spectrum of Graphs, Graph Theory, Combinatorics, and Applications, 2 (1991) 871-898.
- [5] M.W. Newman, The Laplacian Spectrum of Graphs, Masters Thesis, University of Manitoba, 2000.
- [6] G.R. Omid, K. Tajbakhsh, Star-like trees are determined by their Laplacian spectrum, Linear Algebra and its Applications 422 (2007) 654-658.
- [7] X. Shen, Y. Hou, Y. Zhang, Graph Z_n and some graphs related to Z_n are determined by their spectrum, Linear Algebra and its Applications, 404 (2005) 58-68.